

РАСЧЕТЫ ДВУХСЛОЙНЫМ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ОБРАЗЦА МАТЕРИАЛА

Аннотация. Исследуется задача определения диэлектрической проницаемости неоднородных образцов материалов произвольной геометрической формы, помещенных в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. Предложен итерационный метод для численного решения задачи. Доказана его сходимость. Представлены результаты расчетов диэлектрической проницаемости образцов материалов.

Ключевые слова: диэлектрическая проницаемость материала, обратная краевая задача, итерационный метод.

Abstract. The article investigates a problem of dielectric permittivity determination of non-homogeneous arbitrary shaped materials located in rectangular waveguide. The author suggests an iteration method for numerical solving of the problem. The article proves the method's convergence and presents numerical results for dielectric body permittivity determination.

Key words: permittivity of dielectric body, inverse boundary value problem, iteration method.

Введение

Определение диэлектрических и магнитных параметров нанокomпозитных материалов и сложных наноструктур с различной геометрией является актуальной задачей нанотехнологии и нанoeлектроники. Однако эти параметры, как правило, недоступны для экспериментального измерения (ввиду композитного характера материалов) [1, 2], что приводит к необходимости применять методы математического моделирования и решать задачи численно с помощью компьютеров [3]. При этом приходится решать трехмерные векторные задачи в полной электродинамической постановке.

В статье исследуется задача определения диэлектрической проницаемости неоднородных образцов материалов произвольной геометрической формы, помещенных в прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками. В работе [4] задача сведена к решению нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения. Интегральное уравнение изучали, опираясь на результаты исследования соответствующей краевой задачи и теорему эквивалентности краевой задачи и интегрального уравнения [5]. Была доказана теорема о существовании и единственности решений нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения и обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов [6–8]. Численные результаты для случая однородного тела были получены в [9]. Некоторые особенности реализации численного алгоритма представлены в [10].

1. Постановка обратной задачи

Пусть в декартовой системе координат $P = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, -\infty < x_3 < \infty\}$ – волновод с идеально проводящей поверхностью ∂P . В волно-

воде расположено неоднородное анизотропное тело Q ($Q \subset P$ – область), характеризующееся постоянной магнитной проницаемостью μ_0 и функцией переменной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$. Функция $\varepsilon(x)$ является ограниченной функцией в области $\bar{Q}$, $\varepsilon \in L_\infty(Q)$, а также $\varepsilon^{-1} \in L_\infty(Q)$. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая.

Случай переменной магнитной проницаемости (при постоянной диэлектрической проницаемости, равной ε_0) рассматривается аналогично и может быть получен из рассматриваемого случая простой заменой обозначений.

Как показано в [4, 5], рассматриваемая обратная задача может быть сведена к следующей задаче для нелинейного объемного сингулярного уравнения.

Введем ток

$$\mathbf{J}(x) = \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(x), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}(x)$ – электрическое поле.

Тогда электрическое поле выражается через ток по формуле

$$\mathbf{E}(x) = \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1} \mathbf{J}(x). \quad (2)$$

Интегродифференциальное уравнение, к которому сводится обратная задача, имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1} \mathbf{J}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q \hat{G}_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\hat{G}_E(x, y)$ – (известный) диагональный тензор Грина [4, 5, 10] с компонентами

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0n})} \cos \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \cos \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2; \\ G_E^2 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}(1+\delta_{0m})} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \cos \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \cos \frac{\pi m}{b} y_2; \\ G_E^3 &= \frac{2}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{nm}|x_3-y_3|}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi n}{a} x_1 \sin \frac{\pi m}{b} x_2 \sin \frac{\pi n}{a} y_1 \sin \frac{\pi m}{b} y_2. \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 - k_0^2},$$

при этом ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы $\text{Im } \gamma_{nm} \geq 0$ и $\text{Re } \gamma_{nm} \geq 0$, если $\text{Im } \gamma_{nm} = 0$. В формуле (3) k_0 – волновое число свободного пространства, $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, ω – круговая частота. Параметры волновода выбраны так, чтобы $\pi/a < k_0 < \pi/b$. В этом случае в волноводе может распространяться только одна мода. $\mathbf{E}^0(x) = \mathbf{e}_2 A^{(+)} i \omega \mu_0 \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{-i \gamma_1^{(2)} x_3}$ – известное падающее поле (мода в волноводе); $A^{(+)}$ – (известная) амплитуда падающей волны; $\gamma_1^{(2)} = \sqrt{k_0^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}$; $\mathbf{e}_2$ – второй орт в декартовой системе координат.

Дополнительное асимптотическое уравнение запишется в форме [4, 5]

$$Q_1^{(+)} = A^{(+)} + k_0^2 \frac{1}{b \gamma_{10} i \pi \omega \mu_0} \int_Q \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i \gamma_1^{(2)} y_3} \left[\frac{\epsilon(y)}{\epsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(y) \cdot \mathbf{e}_2 dy, \quad (4)$$

$$\text{где } \gamma_{10} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - k_0^2}.$$

Коэффициент $Q_1^{(+)}$ считается известным из измерений. Требуется определить диэлектрическую проницаемость $\epsilon(x)$, $x \in Q$, посредством серии измерений.

Поскольку количество измерений должно быть конечным, то и неизвестных параметров также должно быть конечное число. Поэтому будем предполагать, что тело Q состоит из N подобластей Q_j таких, что $Q = \bigcup_j Q_j$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $i \neq j$. Мы предполагаем, что $\epsilon(x) = \epsilon^{(j)}$ при $x \in Q_j$,

т.е. в каждой подобласти диэлектрическая проницаемость постоянна. Тогда общее число неизвестных параметров будет равно N .

При измерениях изменяются частоты $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(N)}$ (происходит сканирование по частоте); при этом волновое число изменяется по формуле $k_0^{(i)} = \omega^{(i)} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

2. Формулировка итерационного метода

Будем предполагать, что тело имеет форму параллелепипеда $Q = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$. Выберем равномерную прямоугольную сетку в Q , образованную элементарными параллелепипедами

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_l < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1}k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2}l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3}m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1$, $l = 0, \dots, N_2 - 1$, $m = 0, \dots, N_3 - 1$. Перенумеруем эти элементарные параллелепипеды с помощью одноиндексной нумерации Π_s , $s = 0, \dots, N_0 - 1$, $N_0 = N_1 N_2 N_3$.

Построим двухслойный итерационный процесс для решения обратной задачи по формулам:

$$\xi_n(x) = \left[\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right]^{-1}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x) - k_0^2 \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy - \\ & - \text{grad div} \int_Q \hat{G}(x, y) \mathbf{J}_n(y) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_n(x) = \xi_n(x) \mathbf{J}_n(x); \quad (7)$$

$$F = A + k_0^2 \frac{1}{ab\gamma_{10}} \int_Q \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{i\gamma_{10}^{(2)} y_3} \eta_{n+1}(y) \mathbf{E}_n(y) \cdot \mathbf{e}_2 dy, \quad (8)$$

где

$$F = \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} Q_1^{(+)}, \quad A = \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} A^{(+)}, \quad \eta_n(x) = \left[\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right], \quad \xi_n(x) = \eta_n^{-1}(x). \quad (9)$$

По этим формулам вычисление производится следующим образом. Сначала выбираем начальное приближение $\varepsilon_0(x) = \varepsilon_e$ ($n = 0$), где $\varepsilon_e = \varepsilon_{eff}$, ε_{eff} – эффективная диэлектрическая проницаемость тела, вычисленная как решение обратной краевой задачи с постоянной диэлектрической проницаемостью [4, 5]. Нельзя взять в качестве $\varepsilon_e = \varepsilon_0$, так как по формуле (7) нельзя определить электрическое поле. По формуле (5) вычисляется значение $\xi_0(x)$.

Далее по формуле (6) определяется ток $\mathbf{J}_n(x)$ как решение интегродифференциального уравнения методом коллокации. Затем по формуле (7) по току определяем электрическое поле $\mathbf{E}_n(x)$ на сетке. Данную процедуру проводим N раз при различных значениях $k_0 = k_0^{(1)}, k_0 = k_0^{(2)}, \dots, k_0 = k_0^{(N)}$. Таким образом, получаем N значений полей $\mathbf{E}_n^{(1)}, \mathbf{E}_n^{(2)}, \dots, \mathbf{E}_n^{(N)}$ при различных $k_0^{(1)}, k_0^{(2)}, \dots, k_0^{(N)}$. На этом заканчивается вычисление на первом «слое».

На втором «слое» по известным значениям полей $\mathbf{E}_n^{(i)}(x)$ ($i=1, \dots, N$) из формулы (8) определяем новое значение $\eta_{n+1}(x)$. Для этого потребуется произвести решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), составленной из уравнения (8), относительно неизвестных параметров. При этом «коэффициенты прохождения» $F_i = F(k_0^{(i)})$ находятся с помощью измерений. Считаем, что $A^{(+)} = 1$.

Мы предположили выше, что $\eta_n(x) = \eta_n^{(j)}$ при $x \in Q_j$. Кроме того, пусть подобласти Q_j состоят из объединения элементарных параллелепипедов сетки $Q_j = \bigcup_l \Pi_l$. Мы будем считать также, что $\mathbf{E}_n^{(i)}(x) = \mathbf{E}_n^{(i,l)}$ при $x \in \Pi_l$, т.е. поле аппроксимируется некоторой постоянной внутри элементарных параллелепипедов.

Формула (8) приводит к конечномерной СЛАУ. Образует матрицы $E = \{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_n^{(i,l)}\}_{i=1, l=1}^{N, N_0}$ размера $N \times N_0$ и $H = \{H_{lj}\}_{l=1, j=1}^{N_0, N}$ размера $N_0 \times N$, где $H_{lj} = 0$ при l таких, что $\Pi_l \not\subset Q_j$. Тогда будем иметь СЛАУ с матрицей $A_N = EH$ размера $N \times N$:

$$A_N \eta_{n+1} = B, \quad (10)$$

которая решается относительно неизвестных $\eta_{n+1} = (\eta_{n+1}^{(1)}, \dots, \eta_{n+1}^{(N)})^T$. Здесь и ниже мы будем отождествлять (кусочно-постоянную) функцию $\eta_{n+1} = \eta_{n+1}(x)$ и вектор $(\eta_{n+1}^{(1)}, \dots, \eta_{n+1}^{(N)})^T$, так как они однозначно определяют друг друга.

Коэффициенты матрицы A_N и правой части B в случае изотропного неоднородного тела вычисляются по следующим формулам:

$$a_{ij} = \sum_{l: \Pi_l \subset Q_j} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}_n^{(i,l)} H_{li}; \quad (11)$$

$$H_{li} = \int_{\Pi_l} \sin\left(\frac{\pi y_1}{a}\right) e^{iy_3 \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} dy_1 dy_2 dy_3, \quad b_i = \frac{(F_i - A)ab}{(k_0^{(i)})^2} \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - (k_0^{(i)})^2}. \quad (12)$$

Значение интеграла по параллелепипеду Π_l можно вычислить аналитически:

$$H_{li} \equiv \int_{x_{l0}-h_1/2}^{x_{l0}+h_1/2} \int_{y_{l0}-h_2/2}^{y_{l0}+h_2/2} \int_{z_{l0}-h_3/2}^{z_{l0}+h_3/2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{iz \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} dx dy dz =$$

$$= \frac{4h_2 a}{\pi \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} e^{iz_{l0} \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}}} \sin \left(\frac{h_3}{2} \sqrt{(k_0^{(i)})^2 - \frac{\pi^2}{a^2}} \right) \sin \frac{h_1}{2} \sin x_{l0}.$$

Далее проверяется выполнение неравенств $|\eta_{n+1}^{(i)} - \eta_n^{(i)}| < \delta$ ($i=1, \dots, N$) с заданной точностью $\delta(>0)$. Если требуемая точность достигнута для каждого $\eta_{n+1}^{(i)}$ ($i=1, \dots, N$), то вычисления прекращаются. Если требуемая точность не достигнута, то $\xi_{n+1}(x) := \eta_{n+1}^{-1}(x)$, $n := n+1$, и вычисления повторяются с формулы (6).

В качестве искомого выбирается значение для относительной диэлектрической проницаемости

$$\frac{\varepsilon_n(x)}{\varepsilon_0} = \eta_n(x) + 1.$$

Ключевым моментом в данном двухслойном итерационном процессе является возможность определения $\varepsilon_{n+1}(x)$ по известному полю $E_n(x)$ из формулы (7). Если искомая функция $\varepsilon(x)$ имеет N неизвестных параметров, то необходимо иметь по крайней мере результаты N различных измерений.

Поскольку размер матрицы A_N сравнительно невелик (не более нескольких тысяч), при решении системы (12) можно воспользоваться простыми методами решения систем линейных алгебраических уравнений, например методом Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице.

Решение уравнения (5) подробно описано в [10].

Теорема 1. Пусть существует $F(\eta_e)$ для некоторого η_e и верно $\eta_e = F(\eta_e)B_e$. Тогда найдется такое $r > 0$, что при выполнении условий $\max_{\eta \in B_r(\eta_e)} \|F(\eta) - F(\eta_e)\| \|B\|_\infty + \|F(\eta_e)\| \|B - B_e\|_\infty \leq r$ и $\|B\|_\infty < M^{-1}$ отображение $F(\bullet)B: B_r(\eta_e) \rightarrow B_r(\eta_e)$ является сжимающим, итерационный процесс $\eta_{n+1} = F(\eta_n)B$ сходится к точному (единственному) решению $\eta \in B_r(\eta_e)$ уравнения

$$\eta = F(\eta)B \quad (13)$$

со скоростью геометрической прогрессии с показателем $q := \|B\|_\infty M (< 1)$ при любом начальном приближении $\eta_0 \in B_r(\eta_e)$.

Эта теорема теоретически обосновывает двухслойный итерационный метод определения функции $\varepsilon(x)$. Наиболее сложным является обеспечение условия $\eta_e = F(\eta_e)B_e$. Оно означает, что должно быть известно решение обратной задачи с «близкими» параметрами. В качестве такой задачи можно выбрать, например, задачу определения эффективной диэлектрической про-

нищаемости, когда $\eta^{(1)} = \dots = \eta^{(N)} = \eta_e$. Эта задача подробно исследована в [4, 6, 7] (где также указаны условия существования ее решения).

3. Численные результаты

Описание решения интегродифференциального уравнения методом коллокации имеется в [10]. В качестве точек коллокации выбираем центры элементарных параллелепипедов. Параметры задачи: $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $k_0 = 2,5$, $N = 1$, $N_0 = 8$. Коэффициент F вычисляется с помощью аналитического решения прямой задачи дифракции [13, 14].

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов относительной диэлектрической проницаемости двухслойным итерационным методом для случая неоднородного тела, состоящего из двух секций:

$$Q_1 = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, 0 < x_3 < c_1\};$$

$$Q_2 = \{x: 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b, c_1 < x_3 < c\}.$$

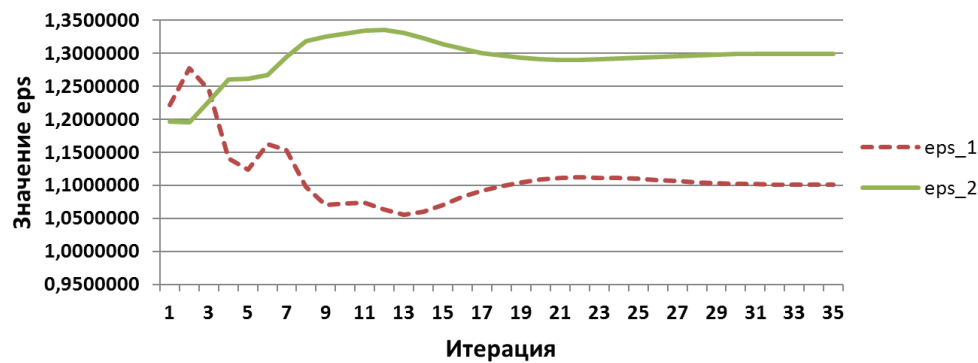


Рис. 1. Разбиение 4 к 6

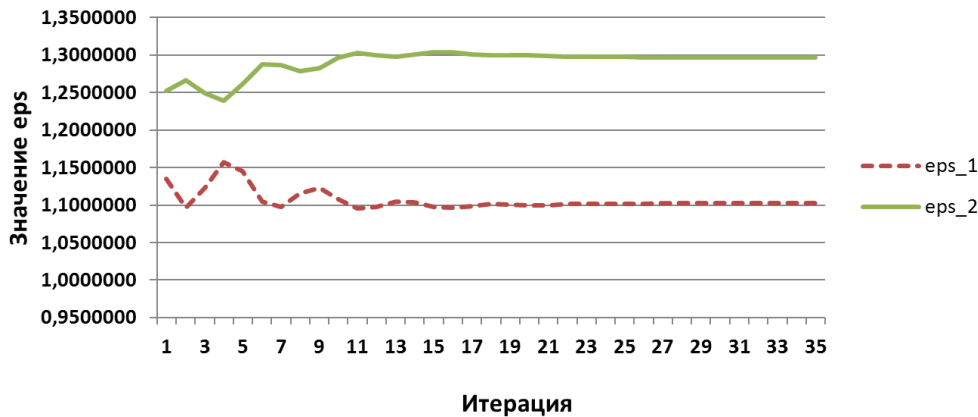


Рис. 2. Разбиение 6 к 4

Параметры задачи: $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $c_1 = 1$, $k_0^{(1)} = 1,7$, $k_0^{(2)} = 1,6$, $N = 2$, $N_0 = 8$. Начальное значение относительной диэлектрической проницаемости

цаемости в каждой секции равнялось $\epsilon_e = 1,2$. Точные значения, полученные в результате аналитического решения модельной задачи, равнялись $\epsilon^{(1)} = 1,1$ в первой секции и $\epsilon^{(2)} = 1,3$ – во второй секции.

Расчеты показывают высокую точность (порядка 0,4 %) при определении относительной диэлектрической проницаемости образца. Метод быстро сходится даже при выборе сильно отличающегося начального приближения от точного значения.

Список литературы

1. **Solymar, L.** Waves in Metamaterials / L. Solymar, E. Shamonina. – New York : Oxford University Press, 2009.
2. **Zharova, N. A.** Nonlinear Transmission and Spatiotemporal Solutions in Metamaterials with Negative Refraction / N. A. Zharova, I. V. Shadrivov, A. A. Zharov, Yu. S. Kivshar // Optics Express. – 2005. – V. 13, № 4. – P. 1291–1298.
3. **Shestopalov, Yu. V.** Development of Mathematical Methods for Reconstructing Complex Permittivity of a Scatterer in a Waveguide / Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov, V. V. Yakovlev // Proceedings of 5th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering, (Antalya, Turkey, 22–25 October, 2008). – Antalya, 2008.
4. **Смирнов, Ю. Г.** Применение ГРИД-технологий для решения нелинейного объемного сингулярного интегрального уравнения для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 3. – С. 2–10.
5. **Kobayashi, K.** Investigation of Electromagnetic Diffraction by a Dielectric Body in a Waveguide Using the Method of Volume Singular Integral Equation / K. Kobayashi, Yu. V. Shestopalov, Yu. G. Smirnov // SIAM Journal of Applied Mathematics. – 2009. – V. 70, № 3. – С. 969–983.
6. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов / Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1. – С. 11–24.
7. **Смирнов, Ю. Г.** О существовании и единственности решений обратной краевой задачи определения диэлектрической проницаемости материалов / Ю. Г. Смирнов, Д. А. Миронов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1587–1597.
8. **Smirnov, Yu. G.** Existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of the complex permittivity reconstruction of a dielectric body in a waveguide / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov // Inverse Problems. – 2010. – V. 26. – № 105002. – P. 1–14.
9. **Smirnov, Yu. G.** Analysis of Inverse Scattering in a Waveguide using the Method of Volume Singular Integral Equation / Yu. G. Smirnov, Yu. V. Shestopalov, D. Mironov // URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS 2010), (Germany, Berlin, 16–19 August, 2010). – Berlin, 2010. – P. 532–534.
10. **Васюнин, Д. И.** Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала / Д. И. Васюнин, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3. – С. 68–78.
11. **Колмогоров, А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976.

12. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984.
13. **Гурина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на диэлектрическом параллелепипеде, расположенном в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гурина, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
14. **Гришина, Е. Е.** Численное и аналитическое решение задачи дифракции электромагнитного поля на двух секциях с разной диэлектрической проницаемостью, расположенных в прямоугольном волноводе / Е. Е. Гришина, Е. Д. Деревянчук, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4. – С. 73–81.

Васюнин Денис Игоревич
аспирант, Пензенский
государственный университет

Vasyunin Denis Igorevich
Postgraduate student,
Penza State University

E-mail: mmm@pnzgu.ru

УДК 517.9

Васюнин, Д. И.

Расчеты двухслойным итерационным методом диэлектрической проницаемости неоднородного образца материала / Д. И. Васюнин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 71–79.